（様式課程博士３）

学 位 論 文 の 要 旨

専　攻　名	工学専攻	ふりがな 氏　名	しんしょう　よしき 新庄　慶基　（印）
学位論文題目	指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ に関する研究 (Study on the exponential Diophantine equation $a^x+b^y=c^z$)		

指数型不定方程式には長い歴史がある。まず，a,b,c はそれぞれ 1 より大きく，互いに素な正の整数とする。そのとき，指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ の x,y,z は正の整数であるという問題を多くの研究者らが部分的な場合において完全に決定できることを示した。特に，1956 年に Sierpinsk によって，指数型不定方程式 $3^x+4^y=5^z$ がただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$ を持つことを示され，その同年，Jesmanowicz が指数型不定方程式 $5^x+12^y=13^z$，$7^x+24^y=25^z$，$9^x+40^y=41^z$，$11^x+60^y=61^z$ のそれぞれについて，ただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$ を持つことを示した。その後，Jesmanowicz は a,b,c が $a^2+b^2=c^2$ を満たす正の整数となるようなピタゴラス数ならば，指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ はただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$ を持つという予想を提起した。その予想は Jesmanowicz 予想と呼ばれ多くの研究者によって研究が行われているが未解決の問題である。また，Jesmanowicz 予想の一般化として寺井氏が寺井予想と呼ばれる指数型不定方程式について予想を提起されており，この予想も同様に多くの特別な場合において正しいことが証明されているが未解決である。

一方，指数型不定方程式の最近の研究対象として，2012 年に寺井氏が m が正の整数で $1\leq m\leq 20$ または，$m\not\equiv 3 \pmod 6$ である指数型不定方程式 $(4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y=(3m)^z$ はただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(1,1,2)$ を持つことを，初等的な方法と Baker 理論により証明した。この予想はその後，Suy－Li，Bilu－Hanrot－Voutier，Bertok らにより完全に証明された。そして，今では m を 1 より大きい正の整数とし，p,q,r を $p+q=r^2$ を満たす正の整数とするとき，指数型不定方程式 $(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$ はただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(1,1,2)$ を持つという予想として広く研究されるようになった。

著者は指数型不定方程式 $(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$ についてある特別な場合においていくつかの条件を与えることでただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(1,1,2)$ を与えることができたため，その結果を本論文にまとめた。

次に，著者が非常に興味を持って研究を行っているレピュニット数という数がある。これは Beiler が 1966 年に全ての桁の数字が 1 で並ぶような数を命名したことから始まり，レピュニット数は 10 進法で表すと $R_n=\frac{10^n-1}{9}$ で表される。レピュニット数は素数やフィボナッチ数，平方数となる場合について多くの研究者によって研究報告が行われている。

（注）和文 2,000 字又は英文 800 語以内　　　　続紙　有■　　無□

しかしながら，レピュニット数を含む指数型不定方程式の研究はほとんど行われておらず，著者はそのことに着目し，新たな研究領域を開拓していくことを踏まえ，いくつかのレピュニット数を含む指数型不定方程式を予想し，ある条件の下で予想が正しいことを確かめた。さらに，レピュニット数を含む指数型不定方程式が $a^x+(b^2-a^2)^y=b^z$ で表される場合に興味を持ち，いくつかの予想を提起し正しいことを確かめた。特に本研究は，2019 年の宮崎－寺井の結果である指数型不定方程式 $a^x+(a+b)^y=b^z$ の拡張を扱っていることや未解決問題である Jesmanowicz 予想とも関係があったため，それらの関係について触れつつ，著者が得られた結果について本論文にまとめた。

本論文は 5 章により構成されている。そして，大きく 2 つの指数型不定方程式と関係する予想の研究を述べている。

まず，第 1 章では指数型不定方程式を研究する上で重要となるピタゴラス数やヘロン数，レピュニット数などの数について，本研究分野と関連したいくつかの結果について紹介する。

次に，第 2 章と第 3 章において指数型不定方程式 $(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$ に関する特別な場合について証明をしている。

第 2 章では，指数型不定方程式 $(3m^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$ について，いくつかの条件を与えることでただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(1,1,2)$ を持つということを証明した。

第 3 章では，指数型不定方程式 $(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$ について，$m>1$ の正の整数で，p,q,r を r が奇数で，$p\equiv 4 \pmod 8$，$r^2<m$ かつ，$\left(\frac{pm^2+1}{r}\right)=-1$ を満たす正の整数とするとき，いくつかの条件を与えることでただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(1,1,2)$ を持つということを証明した。（ここで，$\left(\frac{*}{*}\right)$ は平方剰余記号である。）

最後に，第 4 章と第 5 章において著者が興味を持っている数であるレピュニット数およびレプディジット数を含む指数型不定方程式について，宮崎－寺井氏が研究されている指数型不定方程式 $a^x+(a+b)^y=b^z$ と関係づけ，類似の指数型不定方程式について予想しいくつかの場合で正しいことを証明した。

第 4 章では，レピュニット数およびレプディジット数を含む指数型不定方程式について，3 つの場合でいくつかの条件を与えることでただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(1,2,2)$ を持つということを証明した。

第 5 章では，2019 年に宮崎－寺井によって予想された指数型不定方程式 $a^x+(a+b)^y=b^z$ の拡張として指数型不定方程式 $m^x+(n^2-m^2)^y=n^z$ を予想し，ある特別な場合において $(m,n)=(2,3)$ の例外を除き，ただ 1 つの正の整数解 $(x,y,z)=(2,1,2)$ を持つことを証明した。また，第 4 章の内容と未解決問題である Jesmanowicz 予想との関係についても紹介する。

【1837 文字（語）】

（注）和文 2,000 字又は英文 800 語以内　　　続紙　有□　　無■

（様式課程博士８）

学位論文審査結果の要旨

専　　　攻	工学　　専攻	氏　　名	新庄 慶基
論 文 題 目	指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ に関する研究		
主　　　査	寺井 伸浩		
審 査 委 員	越智 義道		
審 査 委 員	松尾 孝美		
審 査 委 員	宮崎 隆史		
審 査 委 員			

審査結果の要旨（1000 字以内）

素数や方程式の整数解を主に研究する整数論は幾何学同様、古代ギリシャ時代以来の長い歴史がある。1 次不定方程式 $ax + by = c$ や 2 次不定方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ は昔から解法がよく知られていた。高次の不定方程式や指数型不定方程式の整数解については、未解決の大問題が数多く残っている。本論文では、ピタゴラス数に対する有名な Jesmanowicz 予想の一般化である、$a^p + b^q = c^r$ に対する「寺井予想」が成り立つことを、種々の(a, b, c)の組に対し確かめている。

本論文は 5 つの章より構成されている。第 1 章では指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ と関係するピタゴラス数、ヘロン数、レピュニット数 R_n を定義し、いろいろな興味深い性質を導き、多くの数値例を挙げている。第 2 章では指数型不定方程式 $(3m^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z$ 、第 3 章では指数型不定方程式$(pm^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z$ を、整数論では有名な解析的な理論である Baker 理論、つまり代数的数の対数の linear form(一次形式)の絶対値の下からの評価に関する理論を巧妙に応用して解いている。第 4 章ではレピュニット数 R_n を含む指数型不定方程式について、R_n が満たす恒等式・合同式・整除性と Baker 理論を用いることにより、n に関するある条件の下で解を決定している。第 5 章では 2019 年に宮崎ー寺井によって提起された指数型不定方程式 $a^x + (a + b)^y = b^z$ に関する予想の拡張として、数論計算ソフト Magma による数値実験により、指数型不定方程式 $m^x + (n^2 - m^2)^y = n^z$ に関する興味深い予想を与え、この予想が多くの場合に成り立つことを示している。証明方法は合同式、 既知の結果、Baker 理論等の代数的方法と解析的方法を組み合わせるものである。この予想は Jesmanowicz 予想との関係も深く、いろいろなアプローチによる今後のさらなる研究が期待される。

以上のように、本論文は指数型不定方程式の研究の発展に貢献する有用な研究成果をまとめたものであり、学術的に高く評価できる。また、オンラインで実施された公聴会及び本審査において、幾つかの質問に対しても適切な受け答えと説明がされた。したがって、本論文は博士(工学)の学位論文として価値があるものと認められる。