

令和6年度個別学力試験問題

数 学

(理 工 学 部)

解答時間 100分

配 点 200点

注意事項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 受験番号を解答用紙の所定の欄に記入してください。
3. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入してください。
4. 解答用紙のうら面は使用してはいけません。
5. 問題冊子及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁及び汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
6. 問題冊子及び計算用紙は持ち帰ってください。

1 数列 $\{a_n\}$ は, $a_1 = 2$, $a_{n+1} - 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たし, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする。

- (1) 一般項 a_n を n を用いて表しなさい。
- (2) $S_n^2 + 4S_n + 4 = 2^{10}$ を満たす n の値を求めなさい。
- (3) $\sum_{k=1}^n S_k = 2S_n - 10$ を満たす n の値を求めなさい。

2 n を 2 以上の自然数とする。2 つの曲線

$$C_1 : y = (x - 1)^2, \quad C_2 : y = \frac{1}{n} x^2$$

について, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_n とする。

- (1) 実数 α, β について, $A = \beta - \alpha$ とおく。次の定積分を A を用いて表しなさい。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

- (2) S_n を n を用いて表しなさい。
- (3) 不等式 $\left| n\sqrt{n} S_n - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めなさい。

3 サイコロが2個あり、ひとつは3面が赤く、3面が黒く塗られており、もうひとつは2面が赤く、4面が黒く塗られている。これら2個のサイコロを使って次のゲームを行う。なお、2個のサイコロを同時に1回投げることを「試行」と呼ぶことにする。

・試行を最大3回繰り返す。ただし、1回目または2回目の試行で2個とも赤い面が出れば、以降の試行は行わずゲームを終了する。

・各試行で出た赤い面の個数の合計をゲームの得点とする。

- (1) 1回の試行で赤い面がちょうど1個出る確率を求めなさい。
- (2) 2回以下の試行でゲームが終了する確率を求めなさい。
- (3) 起こり得るゲームの得点とその確率をすべて求めなさい。

4 xy 平面の曲線

$$C: x = 3 \cos^3 \theta, y = 3 \sin^3 \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

上の点 P における接線と、 x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ Q , R とする。

- (1) 点 P の座標を $(3 \cos^3 \theta, 3 \sin^3 \theta)$ とするとき、2点 Q , R の座標を θ を用いてそれぞれ表しなさい。
- (2) 点 P が C 上を動くとき、線分 QR を $1:2$ に内分する点 S の軌跡を求め、図示しなさい。
- (3) (2)で得られた軌跡と x 軸、 y 軸で囲まれた図形を、 y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めなさい。
- (4) 曲線 C の $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ に対応する部分の長さを求めなさい。